文章编号:1000-4939(2024)02-0443-10

基于高精度模态综合法的螺栓连接组合结构不确定模型更新

张勇[1],赵岩[1,2],欧阳华江[1,3]

(1. 大连理工大学工程力学系,116023 大连;2. 大连理工大学宁波研究院,315000 宁波;
3. 英国利物浦大学,L693GH 利物浦)

摘 要:由于螺栓结构中存在复杂的微观特征,数值模型中无法避免的会引入不确定性。针对螺栓设计中参数不确定性量化问题,一种基于高精度模态综合法的螺栓连接组合结构随机模型更新方法被提出。首先考虑高阶剩余模态的影响,推导了适用于螺栓组合结构弹性交界面的高精度模态综合法;之后,在贝叶斯推理框架下,通过组合结构的自振频率和振型的概率分布,建立螺栓连接参数的后验概率密度函数,并借助 DRAM(delayed rejection adaptive metropolis)抽样方法量化参数的不确定性。数值算例表明,针对各子结构之间自振频率差别较大的结构,与模态综合法相比,本研究方法在较少子结构模态参与的情形下,也可以保证良好的模型更新结果。

关键词:组合结构;随机模型更新;贝叶斯方法;模态综合法

中图分类号:O324 **文献标志码**:A **DOI**:10.11776/j.issn.1000-4939.2024.02.018

Stochastic model updating of assembled structures with bolted joints based on the high-precision modal synthesis method

ZHANG Yong[1],ZHAO Yan[1,2],OUYANG Huajiang[1,3]

(1. Department of Engineering Mechanics,Dalian University of Technology,116023 Dalian,China;
2. Ningbo Research Institute,Dalian University of Technology,315000 Ningbo,China;
3. University of Liverpool,L693GH Liverpool,UK)

Abstract: The existence of complex microscopic features in the bolted structure leads to inevitable uncertainty in the numerical model. Aiming at the quantification of parameter uncertainty in bolt design, this paper proposes a stochastic model updating method for assembled structures with bolted joints based on a high-precision modal synthesis method. First, considering the influence of higher-order residual modes, a high-precision modal synthesis method suitable for the elastic interface of bolted joints is derived. Then, under the framework of Bayesian inference, using the natural frequency and mode shape probability distribution of the assembled structure, the posterior probability density function of the bolt parameters is

收稿日期:2021-11-30 **修回日期**:2022-03-30
基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. 11772084;U1906233);国家重点研发计划资助项目(No. 2017YFC0307203);山东省重点研发计划资助项目(No. 2019JZZY010801)
通信作者:赵岩,教授。E-mail:yzhao@dlut.edu.cn
引用格式:张勇,赵岩,欧阳华江. 基于高精度模态综合法的螺栓连接组合结构不确定模型更新[J]. 应用力学学报,2024,41(2):443-452.
ZHANG Yong,ZHAO Yan,OUYANG Huajiang. Stochastic model updating of assembled structures with bolted joints based on the high - precision modal synthesis method[J]. Chinese journal of applied mechanics,2024,41(2):443-452.

established, and the parameter uncertainty is quantified with delayed rejection adaptive metropolis (DRAM) sampling method. The numerical examples indicate that for structures with large differences in natural frequencies among the substructures, compared with the general modal synthesis methods, the method proposed in this paper can ensure good model updating performance in the case of using a small number of substructure modes.

Key words: assembled structure; stochastic model updating; Bayesian inference; component mode synthesis

螺栓是一种常用的装配连接部件,它的力学特性对组合结构的整体动力学行为有明显的影响。通常,建立准确的组合结构动力学模型极具挑战性,一个主要原因是连接部位具有大量的不确定性(如接触面积、接触刚度和预紧力等)。为保证复杂环境载荷下,组合结构动力学行为预测的准确性和可靠性,考虑螺栓连接组合结构的不确定模型更新成为关键步骤。

贝叶斯方法将不确定性以概率的方式嵌入到动力学模型更新过程中,实现了对参数的不确定性的量化,其由后验概率密度函数构建和不确定性量化两部分组成[1-2]。在贝叶斯推理框架下,可由 FFT (fast Fourier transform)系数[3]、功率谱[4]以及时域响应[5]的统计特征和不确定参数先验信息转化为后验概率密度函数。不确定性量化一般使用近似逼近[6]和以马尔科夫链蒙特卡罗方法(Markov Chain Monte Carlo, MCMC)[1]为主的随机抽样方法实现。近似逼近是一种高效的方法,适用于测量数据比较充足,此时不确定参数的后验概率密度函数逼近于高斯分布,其均值为最大后验值(maximum a posterior, MAP),协方差为后验概率密度函数的负对数函数在 MAP 值处的海森矩阵的逆阵。当测量数据不足时,需要从后验概率密度中随机抽样,利用抽样对参数估计和量化不确定性。由于后验概率函数往往是高维复杂的,直接抽样比较困难,很多学者发展改进了 MCMC 抽样方法,如自适应的 MCMC 方法[7]、渐进的 MCMC 方法[2]和混合 MCMC 方法[8]。

贝叶斯模型更新涉及对组合结构的动力学重分析,为了提高计算效率,需要降低组合结构动力学分析的计算规模。模态综合法是常用的动力学减缩方法,其主要思想是将整体结构分成几个子结构,利用子结构的低阶模态信息和子结构之间的边界耦合关系得到整体组合结构的振动方程,从而达到减缩自由度的目的[9]。经典的模态综合法,根据子结构的界面约束类型的不同,建立在 3 种典型的位移近似表达式基础之上:自由交界面模态加剩余影响、约束交界面模态加静约束模态,以及自由与约束混合交界面模态加剩余影响。为了提高模态综合法的收敛性以及计算精度,在 3 种经典的位移表达式的基础上,向树红、邱吉宝等[10-11]提出了高精度自由交界面、约束界面和混合交界面模态综合法。以高精度约束界面模态综合法为例,其的核心思想是利用新的位移展开定理,给出采用低阶约束界面模态的高精度位移展开式,并解析推导出采用约束界面模态的精确动态子结构方法,进而利用精确的剩余约束模态构造出高精度的约束界面模态综合法。而已有的 HURTY[12]、CRAIG[13]、RUBIN[14] 以及 MACNEAL 等[15]提出的约束或者自由界面模态综合方法,也是精确约束或者自由界面模态综合法在低阶情形下的近似结果。KONG[9] 和 WANG 等[16]利用低阶剩余柔度构造减缩的螺栓组合结构的动力学方程,并结合谐波平衡法研究连接结构的非线性特征,数值结果表明了该方法的可行性与高效性。MA[17] 和 ZHAI 等[18]采用自由交界面模态综合法,减小结构的线性自由度,同时采用坐标减缩的方式减小边界非线性自由度,也能够提升结构的分析效率。本研究针对线性连接结构识别的反问题,为了减少组合模型的模型误差,利用约束界面的低阶模态和包含了低阶剩余柔度的广义剩余模态来描述具有弹性边界条件的组合结构的动力学响应,构造了组合结构的减缩高保真动力学模型,在不增加组合结构自由度规模的情形下,提高了减缩模型的计算精度。

本研究考虑基于高保真减缩模型的贝叶斯模型更新问题,首先,利用子结构的低阶主模态和剩余广义约束模态,结合子结构的弹性连接条件,建立组合结构高保真减缩动力学模型。其次,基于组合结构的测量特征值和特征向量的统计特性,以及减缩模型构造连接参数的后验概率密度函数,借助 DRAM 抽样方法的优势,从后验概率密度函数中直接抽样,利用抽样样本量化了连接参数的不确定性。最后,用两个悬臂梁构成的螺栓组合结构来验证本研究方法的有效性。

1　高精度模态综合法

1.1　子结构模态集

将螺栓组合结构按照螺栓连接接头分成 N_{sub} 个子结构,其中第 i 个子结构的无阻尼运动方程可以表示为

$$\boldsymbol{M}^i \ddot{\boldsymbol{x}}^i + \boldsymbol{K}^i \boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{f}^i \quad i = 1,2,\cdots,N_{sub} \tag{1}$$

其中:$\boldsymbol{M}^i$、$\boldsymbol{K}^i$ 分别表示子结构的质量与刚度矩阵;$\boldsymbol{f}^i$ 表示连接边界载荷;$\ddot{\boldsymbol{x}}^i$、$\boldsymbol{x}^i$ 分别表示子结构的加速度和位移响应。

假设第 i 个子结构的自由度数目为 N_d^i,其中包含 N_r^i 个内部自由度和 N_s^i 个连接边界自由度。分别用下标 r 和 s 表示内部和连接边界自由度,则式(1)可以表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{rr}^i & \boldsymbol{M}_{rs}^i \\ \boldsymbol{M}_{sr}^i & \boldsymbol{M}_{ss}^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{x}}_r^i \\ \ddot{\boldsymbol{x}}_s^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{rr}^i & \boldsymbol{K}_{rs}^i \\ \boldsymbol{K}_{sr}^i & \boldsymbol{K}_{ss}^i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_r^i \\ \boldsymbol{x}_s^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{f}_s^i \end{bmatrix} \tag{2}$$

假设简谐激励 $\boldsymbol{f}_s^i = \boldsymbol{F}_s^i e^{i\omega t}$,则对应的位移响应为 $\boldsymbol{x}^i = \boldsymbol{X}^i e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_r^i \\ \boldsymbol{X}_s^i \end{bmatrix} e^{i\omega t}$,$i = \sqrt{-1}$,上式可以表示为频域形式

$$\left(-\omega^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_{rr}^i & \boldsymbol{M}_{rs}^i \\ \boldsymbol{M}_{sr}^i & \boldsymbol{M}_{ss}^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{rr}^i & \boldsymbol{K}_{rs}^i \\ \boldsymbol{K}_{sr}^i & \boldsymbol{K}_{ss}^i \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_r^i \\ \boldsymbol{X}_s^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F}_s^i \end{bmatrix} \tag{3}$$

进一步简化式(3)为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_{rr}^i(\omega) & \boldsymbol{G}_{rs}^i(\omega) \\ \boldsymbol{G}_{sr}^i(\omega) & \boldsymbol{G}_{ss}^i(\omega) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_r^i \\ \boldsymbol{X}_s^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{F}_s^i \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中:$\boldsymbol{G}_{\alpha\beta}^i(\omega) = -\omega^2 \boldsymbol{M}_{\alpha\beta}^i + \boldsymbol{K}_{\alpha\beta}^i$;$\alpha = r,s$;$\beta = r,s$。

将式(4)第一行展开可以得到 $\boldsymbol{X}_r^i$ 和 $\boldsymbol{X}_s^i$ 的关系式

$$\boldsymbol{X}_r^i = \boldsymbol{\eta}^s \boldsymbol{X}_s^i \tag{5}$$

其中:$\boldsymbol{\eta}^s = -(\boldsymbol{G}_{rr}^i(\omega))^{-1} \boldsymbol{G}_{rs}^i(\omega)$。

$(\boldsymbol{G}_{ii}^i(\omega))^{-1}$ 在 ω^2 处的幂级数展开表达式为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{G}_{rr}^i(\omega))^{-1} &= (-\omega^2 \boldsymbol{M}_{rr}^i + \boldsymbol{K}_{rr}^i)^{-1} \\ &= (\boldsymbol{K}_{rr}^i)^{-1} + \omega^2 (\boldsymbol{G}_{rr}^i(\omega))^{-1} \boldsymbol{M}_{rr}^i (\boldsymbol{K}_{rr}^i)^{-1}\end{aligned} \tag{6}$$

将式(6)代入式(5)中

$$\boldsymbol{X}_r^i = -(\boldsymbol{K}_{rr}^i)^{-1} \boldsymbol{K}_{rs}^i \boldsymbol{X}_s^i + \omega^2 (\boldsymbol{G}_{rr}^i(\omega))^{-1} \boldsymbol{\kappa}^i \boldsymbol{X}_s^i \tag{7}$$

其中:$\boldsymbol{\kappa}^i = (\boldsymbol{M}_{rs}^i - \boldsymbol{M}_{rr}^i (\boldsymbol{K}_{rr}^i)^{-1} \boldsymbol{K}_{rs}^i)$。

令约束边界的自由度位移为 0,可以利用子结构特征方程计算子结构的边界约束模态为 $\boldsymbol{\Phi}_m^i$

$$\boldsymbol{\Phi}_m^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{mr}^i \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{mrL}^i & \boldsymbol{\Phi}_{mrH}^i \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{8}$$

其中:$\boldsymbol{\Phi}_{mr}^i$ 的前 N_L^i 列定义为保留低阶约束模态矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{mrL}^i$;剩下的 N_H^i 列为高阶约束模态矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{mrH}^i$;$N_d^i = N_L^i + N_H^i$。

利用约束界面主模态 $\boldsymbol{\Phi}_m^i$ 可以将 $(\boldsymbol{G}_{rr}^i(\omega))^{-1}$ 表示为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{G}_{rr}^i(\omega))^{-1} &= \boldsymbol{\Phi}_{mr}^i (\boldsymbol{\Lambda}_r^i - \omega^2 \boldsymbol{I}_r^i)^{-1} (\boldsymbol{\Phi}_{mr}^i)^T \\ &= \boldsymbol{\Phi}_{mrL}^i (\boldsymbol{\Lambda}_{rL}^i - \omega^2 \boldsymbol{I}_{rL}^i)^{-1} (\boldsymbol{\Phi}_{mrL}^i)^T + \\ &\quad \boldsymbol{\Phi}_{mrH}^i (\boldsymbol{\Lambda}_{rH}^i - \omega^2 \boldsymbol{I}_{rH}^i)^{-1} (\boldsymbol{\Phi}_{mrH}^i)^T\end{aligned} \tag{9}$$

其中:$\boldsymbol{\Lambda}_{rL}^i = (\boldsymbol{\Phi}_{mrL}^i)^T \boldsymbol{K}_{rr}^i \boldsymbol{\Phi}_{mrL}^i$;$\boldsymbol{\Lambda}_{rH}^i = (\boldsymbol{\Phi}_{mrH}^i)^T \boldsymbol{K}_{rr}^i \boldsymbol{\Phi}_{mrH}^i$。

将式(9)代入式(7)中,则式(5)可改写为

$$\boldsymbol{X}_r^i = \boldsymbol{\Phi}_{cr}^i \boldsymbol{X}_s^i + \boldsymbol{\Phi}_{mrL}^i \boldsymbol{q}_{rL}^i \tag{10}$$

其中

$$\boldsymbol{\Phi}_{cr}^i = \boldsymbol{\Phi}_{cr0}^i + \omega^2 \boldsymbol{\Phi}_{crH}^i,$$
$$\boldsymbol{\Phi}_{cr0}^i = -(\boldsymbol{K}_{rr}^i)^{-1} \boldsymbol{K}_{rs}^i,$$
$$\boldsymbol{\Phi}_{crH}^i = \boldsymbol{\Phi}_{mrH}^i (\boldsymbol{\Lambda}_{rH}^i - \omega^2 \boldsymbol{I}_{rH}^i)^{-1} (\boldsymbol{\Phi}_{mrH}^i)^T \boldsymbol{\kappa}^i,$$
$$\boldsymbol{q}_{rL}^i = \omega^2 (\boldsymbol{\Lambda}_{rL}^i - \omega^2 \boldsymbol{I}_{rL}^i)^{-1} (\boldsymbol{\Phi}_{mrL}^i)^T \boldsymbol{\kappa}^i \boldsymbol{X}_s^i$$

进一步推导得到子结构的响应为

$$\boldsymbol{X}^i = [\boldsymbol{\Phi}_{mL}^i \quad \boldsymbol{\Phi}_c^i] \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_{rL}^i \\ \boldsymbol{X}_s^i \end{bmatrix} = \boldsymbol{T}^i \boldsymbol{q}^i \tag{11}$$

其中:$\boldsymbol{\Phi}_c^i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{cr0}^i \\ \boldsymbol{I}_s^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{crH}^i \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_{c0}^i + \boldsymbol{\Phi}_{cH}^i$

令 $\boldsymbol{q}^i = [\boldsymbol{q}_{rL}^i \quad \boldsymbol{X}_s^i]^T$,定义为子结构的广义模态坐标,其中包含了低阶模态坐标和边界位移响应。式(10)中 $\boldsymbol{\Phi}_{cr}^i$ 为除低阶模态外的精确广义剩余模态,其中 $\boldsymbol{\Phi}_{cr0}^i$ 为静约束模态,$\boldsymbol{\Phi}_{crH}^i$ 为约束模态的高阶影响,如果忽略掉 $\boldsymbol{\Phi}_{crH}^i$,则式(11)退化为低阶的克雷格-班普顿(CB)方法[13]。而本研究考虑高阶模态 $\boldsymbol{\Phi}_{crH}^i$,并由低阶模态 $\boldsymbol{\Phi}_{mrL}^i$、子结构刚度 $\boldsymbol{K}_{rr}^i$ 和质量 $\boldsymbol{M}_{rr}^i$ 通过下式计算得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_{crH}^i = \omega^2 [&(-\omega^2 \boldsymbol{M}_{rr}^i + \boldsymbol{K}_{rr}^i)^{-1} - \\ &\boldsymbol{\Phi}_{mrL}^i (\boldsymbol{\Lambda}_{rL}^i - \omega^2 \boldsymbol{I}_{rL}^i)^{-1} (\boldsymbol{\Phi}_{mrL}^i)^T] \boldsymbol{\kappa}^i\end{aligned} \tag{12}$$

1.2　子结构耦合动力学方程

将模态变换矩阵代入式(1),得到每一个未耦合的子结构运动学方程为

$$\bar{\boldsymbol{M}}^i \ddot{\boldsymbol{q}}^i + \bar{\boldsymbol{K}}^i \boldsymbol{q}^i = \boldsymbol{F}^i \quad i = 1,2,\cdots,N_{sub} \tag{13}$$

其中

$$\bar{M}^i = (T^i)^T M^i T^i,$$
$$\bar{K}^i = (T^i)^T K^i T^i,$$
$$F^i = (T^i)^T f^i \tag{14}$$

式(13)对应的频域形式为

$$(\bar{K}^i - \omega^2 \bar{M}^i) q^i = F^i \tag{15}$$

将式(11)代入式(14),则化简后的式(15)可以表示为

$$(\tilde{K}^i - \omega^2 \tilde{M}^i) q^i = F^i \tag{16}$$

其中

$$\tilde{K}^i = \begin{bmatrix} \Lambda^i_{rL} & \\ & K_{c0} \end{bmatrix},$$
$$K_{c0} = (\Phi^i_{c0})^T K^i \Phi^i_{c0},$$
$$\tilde{M}^i = \bar{M}^i_0 + \omega^2 \bar{M}^i_1,$$
$$\bar{M}^i_0 = \begin{bmatrix} I & (\Phi^i_c)^T M^i \Phi^i_{mL} \\ (\Phi^i_{mL})^T M^i \Phi^i_c & (\Phi^i_c)^T M^i \Phi_{ic} \end{bmatrix},$$
$$\bar{M}^i_1 = \begin{bmatrix} (\Phi^i_{c0})^T M^i \Phi^i_{cH} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

假设如图(1)所示的两个子结构弹性连接,则其未耦合的子结构运动学方程为

$$\bar{M}^{AB} \ddot{q}^{AB} + \bar{K}^{AB} q^{AB} = T^{AB} \bar{F}^{AB} \tag{18}$$

其中

$$\bar{M}^{AB} = \begin{bmatrix} \bar{M}^A & \\ & \bar{M}^B \end{bmatrix}, \bar{K}^{AB} = \begin{bmatrix} \bar{K}^A & \\ & \bar{K}^B \end{bmatrix},$$

$$T^{AB} = \begin{bmatrix} T^A & \\ & T^B \end{bmatrix}, q^{AB} = \begin{bmatrix} q^A \\ q^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q^A_{rL} \\ X^A_s \\ q^B_{rL} \\ X^B_s \end{bmatrix}, \bar{F}^{AB} = \begin{bmatrix} F^A \\ F^B \end{bmatrix} \tag{19}$$

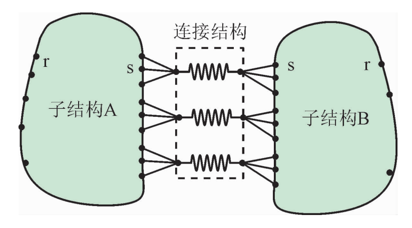


图 1 螺栓组合结构的简化模型

Fig. 1 Simplified model of the assembled structure with bolted joints

假设连接结构为 J,连接子结构 A 和 B 的边界自由度。根据接触条件,通共节点的方式减少接触界面的自由度,如图 1 所示。减缩后的连接结构的节点位移分为两个部分 $X^J = \begin{bmatrix} X^J_A \\ X^J_B \end{bmatrix}$,其中 X^J_A 为与子结构 A 连接的自由度位移响应,X^J_B 为与子结构 B 连接的自由度位移响应。将作用于 X^J_A 和 X^J_B 上的内力分别记为 f^J_A 和 f^J_B,连接结构的刚度矩阵为 $K^J = \begin{bmatrix} K^J_{AA} & -K^J_{AB} \\ -K^J_{BA} & K^J_{BB} \end{bmatrix}$。连接结构的力学关系可以表示为

$$\begin{bmatrix} f^J_A \\ f^J_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^J_{AA} & -K^J_{AB} \\ -K^J_{BA} & K^J_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^J_A \\ X^J_B \end{bmatrix} \tag{20}$$

子结构 A 和 B 与连接结构应满足相容和平衡条件[19]为

$$\begin{bmatrix} X^A_s \\ X^B_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X^J_A \\ X^J_B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f^A_s \\ f^B_s \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} f^J_A \\ f^J_B \end{bmatrix} \tag{21}$$

假设子结构 A 的低阶保留约束模态数目为 N^A_L,内部非边界节点自由度数目和边界节点自由度数目分别为 N^A_r 和 N^A_s;子结构 B 的低阶模态数目、内部节点自由度数目和边界节点自由度数目分别为 N^B_L、N^B_r 和 N^B_s。则子结构的响应向量可以简化表示为

$$\begin{bmatrix} X^A_s \\ X^B_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I^A_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I^B_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q^A_{rL} \\ X^A_s \\ q^B_{rL} \\ X^B_s \end{bmatrix} = E q^{AB} \tag{22}$$

其中:$E = \begin{bmatrix} 0 & I^A_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I^B_s \end{bmatrix}_{(N^A_s+N^B_s)\times(N^A_L+N^A_s+N^B_L+N^B_s)}$

将式(20)(21)代入式(15),并利用式(22),简化耦合结构的无阻尼动力学方程为

$$(\bar{K}^{AB} + K^J - \omega^2 \bar{M}^{AB}) q^{AB} = 0 \tag{23}$$

其中

$$K^J = (T^{AB})^T E^T K^J E,$$
$$\bar{M}^{AB} = \begin{bmatrix} \bar{M}^A & \\ & \bar{M}^B \end{bmatrix} = \bar{M}^{AB}_0 + \omega^2 \bar{M}^{AB}_1 \tag{24}$$

引入高阶模态使得组合结构的特征方程是含 ω 的非线性方程,需要进行迭代求解。根据式(20)构造的格式为

$$\{\bar{K}^{AB} + K^J - \omega_i^2 [\bar{M}^{AB}_0 + \omega_{i-1}^2 \bar{M}^{AB}_1(\omega_{i-1}^2)]\} q^{AB} = 0 \tag{25}$$

根据式(25)可求解得到组合结构的特征值和特征向量。

2 基于减缩模型的贝叶斯有限元模型更新方法

本节借助贝叶斯推理框架和减缩动力学模型推导组合结构连接参数的后验概率分布函数,并结合 DRAM 方法量化连接参数的不确定性。

在确定的模型类下,不确定性参数的后验概率函数可以表示为

$$p(\boldsymbol{\theta} \mid D) = cp(D \mid \boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}) \tag{26}$$

其中:$\boldsymbol{\theta}$ 为连接结构的不确定性参数;c 为归一化常数;$p(D \mid \boldsymbol{\theta})$ 为似然函数;$p(\boldsymbol{\theta})$ 为不确定参数的先验概率密度函数。

以组装结构的特征值 $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}$ 和特征向量 $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$ 为测量值 D ,以连接接头参数 $\boldsymbol{\theta}$ 和测量值误差的标准差 $\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}$ 为不确定参数,式(26)改写成

$$p(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon} \mid \widehat{\boldsymbol{\lambda}},\widehat{\boldsymbol{\varphi}}) = c_1 p(\widehat{\boldsymbol{\lambda}},\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \mid \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon})p(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) \tag{27}$$

一般认为特征值 $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}$ 和特征向量 $\widehat{\boldsymbol{\varphi}}$ 是独立分布的,故似然函数表示为

$$\begin{aligned} p(\widehat{\boldsymbol{\lambda}},\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \mid \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) &= p(\widehat{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon})p(\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \mid \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) \\ &= \prod_{r=1}^{N_{\mathrm{L}}} p(\widehat{\lambda}_r \mid \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon})p(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_r \mid \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) \end{aligned} \tag{28}$$

其中:角标 r 表示第 r 阶特征值或者特征向量;N_{L} 表示取的子结构低阶模态数目。

理论特征值、特征向量和测量值之间存在以下关系

$$\widehat{\lambda}_r = \lambda_r(\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon_{\lambda_r} \tag{29}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_r = a_r \boldsymbol{E}_{\varphi} \boldsymbol{\varphi}_r(\boldsymbol{\theta}) + \boldsymbol{\varepsilon}_{\varphi_r} \tag{30}$$

其中:a_r 为比例因子;$\boldsymbol{E}_{\varphi}$ 为自由度提取矩阵,从数值计算的模态振型中提取对应于测量自由度的模态振型;ε_{λ_r} 是特征值对应的测量误差,被模型化为均值为 0,方差为 $\sigma^2_{\lambda_r}$ 的高斯分布;ε_{φ_r} 为特征向量对应的测量误差,被模型化为均值为 0,协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}_{\varphi_r}$ 的多维高斯分布[20]。

$$a_r = \frac{\langle \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_r, \boldsymbol{E}_{\varphi} \boldsymbol{\varphi}_r(\boldsymbol{\theta}) \rangle}{\| \boldsymbol{E}_{\varphi} \boldsymbol{\varphi}_r(\boldsymbol{\theta}) \|^2},$$
$$\sigma^2_{\lambda_r} = \sigma^2_{\varepsilon} \widehat{\lambda}^2_r,$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_{\xi_r} = \sigma^2_{\varepsilon} \| \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_r \|^2 \tag{31}$$

由此推导得到测量特征值的概率分布为

$$p(\widehat{\lambda}_r \mid \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) = c_2 \exp\left[-\frac{1}{2} L_{\lambda_r}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) \right] \tag{32}$$

其中: $c_2 = 1/(\sqrt{2\pi}\,\sigma_{\varepsilon} \widehat{\lambda}_r)$ 为归一化常数;

$$L_{\lambda_r}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) = \left(\frac{\widehat{\lambda}_r - \lambda_r(\boldsymbol{\theta})}{\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon} \widehat{\lambda}_r} \right)^2 。$$

测量特征向量的概率分布为

$$p(\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_r \mid \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) = c_3 \exp\left[-\frac{1}{2} L_{\varphi_r}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) \right] \tag{33}$$

其中:$c_3 = 1/(\sqrt{2\pi})^{N_{\varphi}} \sigma_{\varepsilon} \| \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_r \|$ 为归一化常数;

$$L_{\varphi_r}(\boldsymbol{\theta},\sigma_{\varepsilon}) = \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^2_{\varepsilon}} \left\| \frac{\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_r}{\| \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_r \|} - \frac{\langle \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_r, \boldsymbol{E}_{\varphi}\boldsymbol{\varphi}_r(\boldsymbol{\theta}) \rangle}{\| \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_r \| \| \boldsymbol{E}_{\varphi}\boldsymbol{\varphi}_r(\boldsymbol{\theta}) \|} \frac{\boldsymbol{E}_{\varphi}\boldsymbol{\varphi}_r(\boldsymbol{\theta})}{\| \widehat{\boldsymbol{\varphi}}_r \|} \right\|^2;$$

N_{φ} 为$\widehat{\boldsymbol{\varphi}}_r$的维度。

由此计算得到似然函数为

$$\begin{aligned} & p(\widehat{\boldsymbol{\lambda}},\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \mid \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) \\ &= p(\widehat{\boldsymbol{\lambda}} \mid \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon})p(\widehat{\boldsymbol{\varphi}} \mid \boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) \\ &= c_4 \prod_{r=1}^{N_{\mathrm{L}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(L_{\lambda_r}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) + L_{\varphi_r}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon})) \right) \end{aligned} \tag{34}$$

代入式(27)推导出后验参数概率为

$$p(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon} \mid \widehat{\boldsymbol{\lambda}},\widehat{\boldsymbol{\varphi}}) \propto \prod_{r=1}^{N_{\mathrm{L}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(L_{\lambda_r}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) + L_{\varphi_r}(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon})) \right) p(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\sigma}_{\varepsilon}) \tag{35}$$

从参数后验概率密度函数中估计参数最优估计值和不确定性量化分为两种方式,利用近似逼近和 MCMC 抽样方法。近似逼近法相对高效,但是需要测量数据充足才能满足后验概率密度函数近似为高斯分布的要求。这里,假定测量数据不是十分充足,不能满足高斯分布的要求,因此,使用 MCMC 抽样方法,通过抽样数据链的统计特征估计最优估计值和不确定性量化。本研究采用的抽样算法是 DRAM 方法[21],为了提高采样效率,DRAM 算法同时结合了拒绝延迟思想和自适应 MCMC 算法。自适应 MCMC 方法可以提高拒绝延迟的效率,而延迟拒绝也可以在自适应过程变缓的时候提供系统性的补救。

3 数值算例

考虑一个两端固支梁模型,固支梁被分为两个部分,子结构 A 和子结构 B,子结构之间通过一个螺栓连接,螺栓被模型化为一个竖直弹簧 θ_1 和一个旋转弹簧 θ_2 。梁的弹性模量为 $E = 2.1 \times 10^{11}$ Pa ,密度 $\rho = 7\,860$ kg/m^3 ,泊松比 $v = 0.3$,梁为方形截面,边长为 $w = 0.02$ m 。

根据子结构 A 和 B 的几何尺寸不同(图 2 ~ 3),分两小节进行讨论。后续讨论用到两种计算方法:

低阶方法和本研究方法。低阶方法中的子结构模态综合方法是克雷格-班普顿法在弹性交界面的推广，本研究方法中的子结构模态综合法是高精度子结构方法在弹性交界面的推广。两种方法的模型更新方法都是基于贝叶斯的模型更新方法如第 2 章所述。

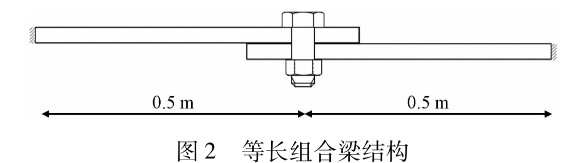


图 2 等长组合梁结构

Fig. 2 Assembled beam structure with beams of equal length

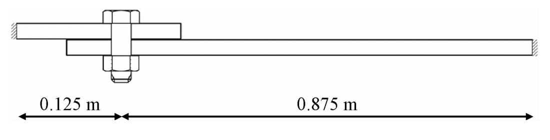


图 3 不等长组合梁结构

Fig. 3 Assembled beam structure with beams of unequal length

假设不确定参数的真值为 $\boldsymbol{\theta}^* = [\theta_1^*, \theta_2^*, \log(\sigma_\varepsilon^2)^*]^{\mathrm{T}} = [10^6, 10^4, -18.6]^{\mathrm{T}}$，其中 $\log(\sigma_\varepsilon^2)^*$ 为测量误差。组合结构的有限元模型共有 40 个平面梁单元，80 个自由度，通过组合子结构和螺栓结构的有限元模型得到整体结构的刚度和质量阵，并求解得到组合结构的特征值 $\{\lambda_r^*\}_{r=1}^{M_n}$ 和特征向量 $\{\boldsymbol{\varphi}_r^*\}_{r=1}^{M_n}$，其中 M_n 表示测量数据的模态阶数。以该特征值和特征向量作为真值，分别添加方差为 $\sigma_\varepsilon^2 \lambda_r^*$ 和 $\sigma_\varepsilon^2 \|\boldsymbol{\varphi}_r^*\|^2$ 的噪声，得到模拟测量数据样本。不确定参数 $\boldsymbol{\theta}^*$ 的先验分布为均匀先验分布，认为在选定的取值范围内，参数的概率是等可能的。σ_ε^2 只能取正值，假设 $\log(\sigma_\varepsilon^2)$ 的先验分布为均标准正态分布。

3.1 子结构几何尺寸相同

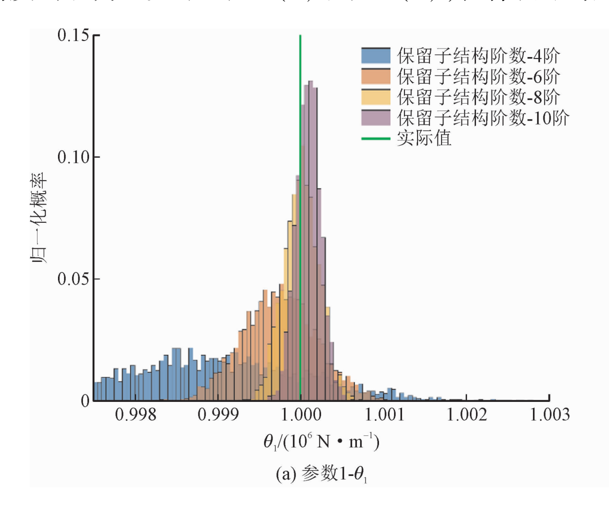
当子结构尺寸相同时(图 2)，以组合模型的前 5 阶含噪声的模态信息作为测量数据，分别使用低阶的克雷格-班普顿(CB)方法和本研究方法量化螺栓连接参数的不确定性。该节算例中根据子结构保留阶数的不同分别设置了 4 种不同的工况，表 1 是两种方法得到不同工况下螺栓参数的后验概率密抽样数据的概率统计结果，不确定性参数除了螺栓连接刚度以外，该算例中还包含了噪声强度 σ_ε^2，$\log(\sigma_\varepsilon^2)$ 可以被用来定性衡量模型误差大小。表中对比了本研究方法和低阶方法在各种工况下不确定性参数 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1, \theta_2, \log(\sigma_\varepsilon^2)]^{\mathrm{T}}$ 对应的均值 μ_θ 和标准差 σ_θ。基于同一种方法，对比子结构不同保留阶数工况下的计算结果，可以发现，随着子结构保留阶数的增加，参数的方差明显减少，$\log(\sigma_\varepsilon^2)$ 的均值越接近于真值，说明不确定性模型误差带来的影响越来越小，螺栓参数样本越集中于均值。对于均值而言，除了 4 阶工况的均值与准确值有明显较大差别外，其他几阶主差别不大，说明保留 6 阶子结构模态可以耦合得到较为准确的组合结构动力学模型。基于不同方法，对比计算结果可以发现，保留 6 阶以上的子结构模态数据时，两种方法的更新结果差别不大，但是保留 4 阶子结构时，本研究方法计算的均值明显更加接近于准确值。

表 1 具有相同尺寸的子结构模型更新结果

Tab. 1 Estimation results of the assembled structure with equal beams

保留阶数	参数	$\boldsymbol{\theta}^*$ / (N·m⁻¹)	本研究方法		低阶方法	
			μ_θ	σ_θ	μ_θ	σ_θ
4 阶	θ_1	1.00×10^6	1 000 479.01	1 174.94	998 850.77	1 144.49
	θ_2	1.00×10^4	10 010.87	28.76	10 000.98	29.10
	$\log(\sigma_\varepsilon^2)$	−18.6	−13.86	0.07	−13.84	0.07
6 阶	θ_1	1.00×10^6	1 000 126.43	431.59	999 751.26	447.90
	θ_2	1.00×10^4	10 000.87	10.49	9 999.73	10.70
	$\log(\sigma_\varepsilon^2)$	−18.6	−15.90	0.08	−15.89	0.07
8 阶	θ_1	1.00×10^6	1 000 142.31	212.02	1 000 013.50	208.11
	θ_2	1.00×10^4	10 000.83	5.18	10 000.35	5.14
	$\log(\sigma_\varepsilon^2)$	−18.6	−17.29	0.08	−17.27	0.07
10 阶	θ_1	1.00×10^6	1 000 136.71	154.16	1 000 095.19	144.26
	θ_2	1.00×10^4	10 000.92	3.80	10 000.42	3.76
	$\log(\sigma_\xi^2)$	−18.6	−17.95	0.08	−17.95	0.08

图 4 和图 5 分别是低阶方法和本研究方法的后验样本直方图，为了方便对比不同子结构保留阶数的计算结果，对抽样样本进行归一化处理，保证样条高度的和为 1。对比图 4(a)和图 5(a)，在保留子结构阶数较少的情况下，本研究方法比低阶方法更能体现出优势，但是对于等长结构，这种优势不是特别明显。对比图 4(b)和图 5(b)，可以看出两种方法对参数 θ_2 的更新结果没有大的区别。



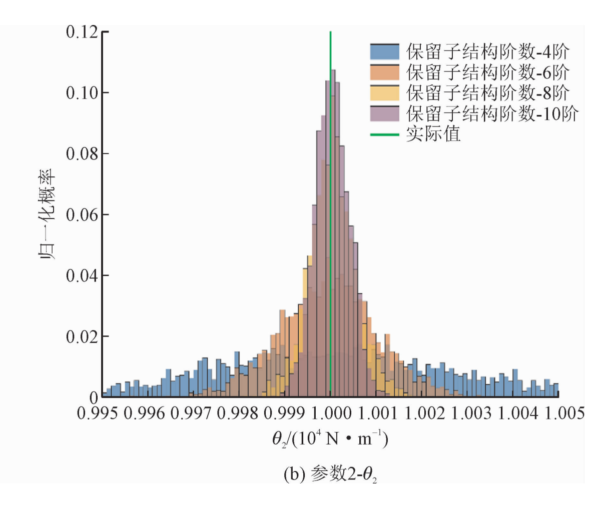


图 4　螺栓参数样本分布(克雷格-班普顿方法)

Fig. 4　The distribution of bolt parameters (CB method)

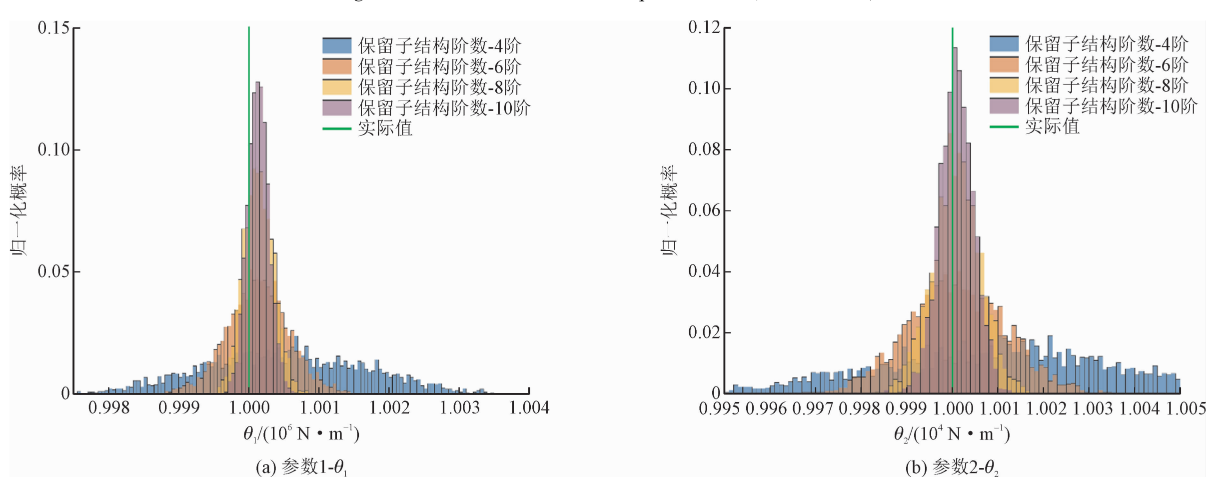


图 5　螺栓参数样本分布(本研究方法)

Fig. 5　The distribution of bolt parameters (proposed method)

3.2　子结构几何尺寸不相同

已有文献[11]表明，如果子结构之间由于尺寸差别或者材料差别引起自振模态差别较大时，为了保证组合结构动力学模态数据的可靠性，需要保留的子结构模态数目明显加多，这样势必会导致计算规模的增加，影响重分析的计算效率。本研究提出的高精度模型更新方法，可以在尽可能减少子结构保留阶数的前提下，得到准确的模型更新结果，并量化参数不确定性。

使用如图 3 所示的模型结构，长梁和短梁的长度比为 5∶1。算例中组合结构的测量模态数目 $M_n = 6$，取子结构的前 4 阶模态参与耦合组合结构模态信息。

表 2 中的标准距离的计算公式为 $N_d = \left|\dfrac{\mu_\theta - \theta^*}{\sigma_\theta}\right|$，表征的是抽样样本的均值与真值之间的距离有几个方差，COV 为变异系数，$\mu_{\log(\sigma_\varepsilon^2)}$ 是 $\log(\sigma_\varepsilon^2)$ 样本的均值统计量，量化分析不确定性。从表 2 可以看出两种方法计算的 θ_1 的均值相差不大，但均值误差明显较大，本研究方法的计算结果更接近准确值。本研究方法的后验样本的标准差明显比低阶方法的小，证明低阶方法的样本更发散，鲁棒性较弱，这一点对比变异系数值也能得到相同的结论。

低阶方法计算的 θ_2 样本的标准距离为 20.48，明显高于其他参数不到 1 的水平，说明低阶方法并不能很好的更新 θ_2 参数。本研究方法和低阶方法计算的测量误差相差不大，但是与真值 $\log(\sigma_\varepsilon^2)^* = -18.6$ 相比较大，这意味着该模型与实际的有限元模型有一定的差别。

图 6 和图 7 分别是低阶方法和本研究方法计算的参数抽样样本对应的自振频率分布图，红点是模拟测量值。从图 6 可以看出，低阶方法计算的自振频率分布图并不能包括测量值，或者说测量值并不在自振频率分布的大概率区间内，主要原因还是 θ_2 的估计值的准确度较差，并且越高阶的自振频率测量值离自振频率样本分布越远。由图 7 可以看出，本研究方法计算的自振频率分布样本能够包含测量值，并且离样本分布的均值距离很近，选择第 4 阶和第 6 阶的自振频率样本分布图可以看出，测量样本在其 95% 的置信区间内。

表 2 不等长子结构模型修正结果

Tab. 2 Estimation results of the assembled structure with unequal beams

参数	本研究方法		低阶方法	
	θ_1	θ_2	θ_1	θ_2
$\boldsymbol{\theta}^*/(\mathrm{N\cdot m^{-1}})$	1.00×10^6	1.00×10^4	1.00×10^6	1.00×10^4
μ_θ	996 192.30	10 054.67	996 273.70	11 731.23
σ_θ	6 563.41	67.13	7 971.90	84.55
COV	6.59×10^{-3}	6.68×10^{-3}	8.00×10^{-3}	7.21×10^{-3}
N_d	0.58	0.81	0.47	20.48
$\mu_{\log(\sigma_\varepsilon^2)}$	−10.54		−10.52	

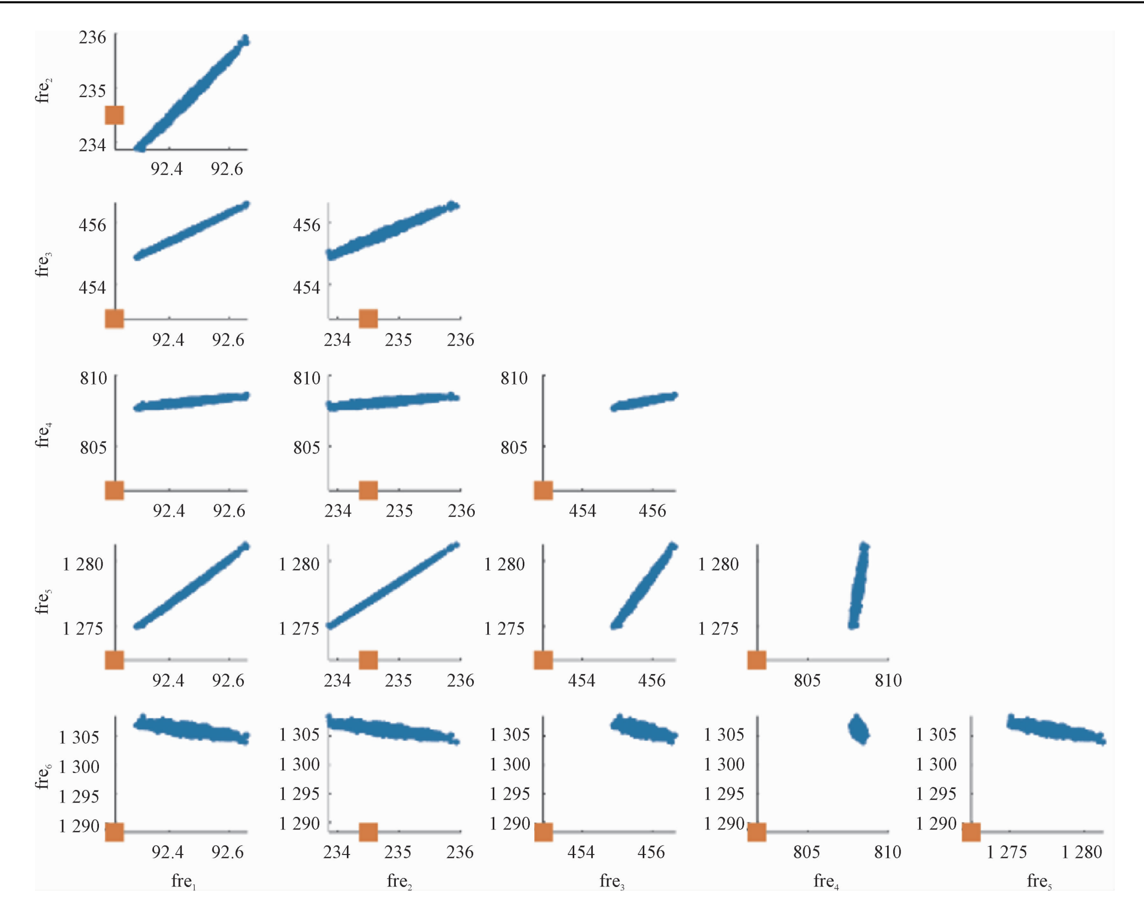


图 6 自振频率样本分布——克雷格-班普顿方法(蓝点-计算样本;红点-测量数据)

Fig. 6 The distribution of natural frequencies—the CB method (blue point—samples; red point—measured data)

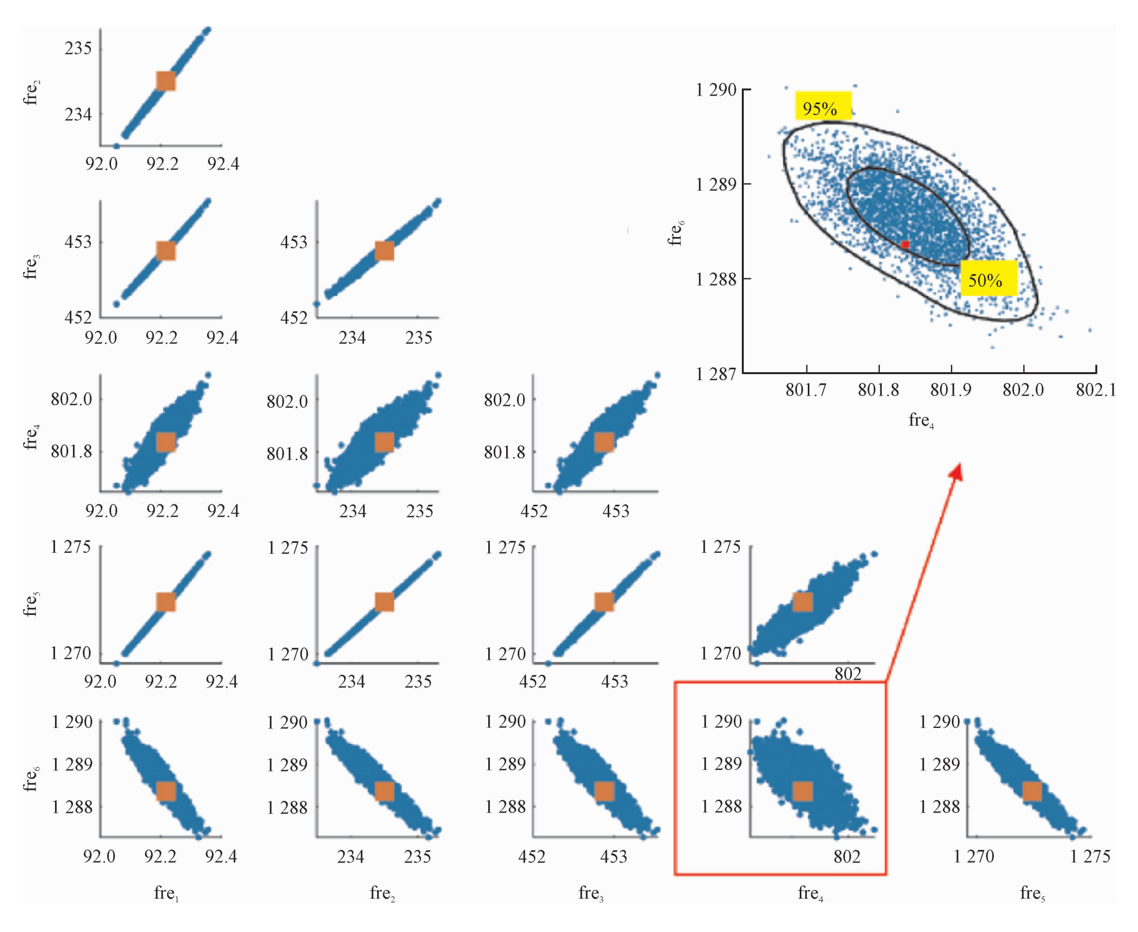


图 7　自振频率样本分布——本研究方法(蓝点-计算样本;红点-测量数据)

Fig. 7　The distribution of natural frequencies—the proposed method (blue point—samples; red point—measured data)

4　结　论

本研究将高精度子结构方法推广到了含有弹性边界的组合结构中,建立了组合结构的高精度减缩模型,利用贝叶斯分析方法将参数不确定性考虑到模型更新中,并利用 MCMC 抽样方法量化了不确定性。结果表明当子结构之间自振频率差别较大时,本研究方法可以利用较少的子结构模态信息得到更准确的模型更新结果。

参考文献:

[1] LAM H F, YANG J H, AU S K. Markov chain Monte Carlo-based Bayesian method for structural model updating and damage detection [J]. Structural control and health monitoring, 2018, 25 (4): e2140.

[2] CHING J, CHEN Y C. Transitional markov chain monte carlo method for bayesian model updating, model class selection, and model averaging[J]. Journal of engineering mechanics, 2007, 133 (7): 816-832.

[3] YUEN K V, KATAFYGIOTIS L S. Bayesian fast fourier transform approach for modal updating using ambient data[J]. Advances in structural engineering, 2003, 6(2): 81-95.

[4] KATAFYGIOTIS L S, YUEN K V. Bayesian spectral density approach for modal updating using ambient data[J]. Earthquake engineering & structural dynamics, 2001, 30(8): 1103-1123.

[5] YUEN K V, KATAFYGIOTIS L S. Bayesian time—domain approach for modal updating using ambient data[J]. Probabilistic engineering mechanics, 2001, 16(3): 219-231.

[6] 颜王吉,曹诗泽,任伟新. 结构系统识别不确定性分析的 Bayes 方法及其进展[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(1): 44-59.
YAN Wangji, CAO Shize, REN Weixin. Uncertainty quantification for system identification utilizing the Bayesian theory and its recent advances[J]. Applied mathematics and mechanics, 2017, 38(1): 44-59(in Chinese).

[7] BECK J L, AU S K. Bayesian updating of structural models and reliability using Markov Chain Monte Carlo simulation[J]. Journal of engineering mechanics, 2002, 128(4): 380-391.

[8] CHEUNG S H, BECK J L. Bayesian model updating using hybrid

Monte Carlo simulation with application to structural dynamic models with many uncertain parameters[J]. Journal of engineering mechanics, 2009, 135(4): 243-255.

[9] KONG L F, JIANG H L, GHASEMI A H, et al. Condensation modeling of the bolted joint structure with the effect of nonlinear dynamics[J]. Journal of sound and vibration, 2019, 442: 657-676.

[10] 向树红,邱吉宝,王大钧. 模态分析与动态子结构方法新进展[J]. 力学进展,2004,34(3):289-303.

XIANG Shuhong, QIU Jibao, WANG Dajun. The resent progresses on modal analysis and dynamic sub-structure methods[J]. Advances in mechanics, 2004, 34(3): 289-303(in Chinese).

[11] 邱吉宝,向树红,张正平. 计算结构动力学[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2009.

[12] HURTY W C. Vibrations of structural systems by component mode synthesis[J]. Journal of the engineering mechanics division, 1960, 86(4): 51-69.

[13] CRAIG R R Jr, BAMPTON M C C. Coupling of substructures for dynamic analyses[J]. AIAA journal, 1968, 6(7): 1313-1319.

[14] RUBIN S. Improved component-mode representation for structural dynamic analysis[J]. AIAA journal, 1975, 13(8): 995-1006.

[15] MACNEAL R H. A hybrid method of component mode synthesis[J]. Computers & structures, 1971, 1(4): 581-601.

[16] WANG D. An improved nonlinear dynamic reduction method for complex jointed structures with local hysteresis model[J]. Mechanical systems and signal processing, 2021, 149: 107214.

[17] MA Z S, CHANG H Z, DING Q, et al. Condensation modeling of the linear structure with nonlinear boundary conditions[J]. Archive of applied mechanics, 2021, 91(6): 2747-2759.

[18] ZHAI Y J, MA Z S, CHANG H Z, et al. Model order reduction and dynamic characteristic analysis of the bolted flange structure with free-free boundaries[J]. Structures, 2021, 34: 149-157.

[19] WU L, WANG G F, LIU H T, et al. An approach for elastodynamic modeling of hybrid robots based on substructure synthesis technique[J]. Mechanism and machine theory, 2018, 123: 124-136.

[20] CHRISTODOULOU K, PAPADIMITRIOU C. Structural identification based on optimally weighted modal residuals[J]. Mechanical systems and signal processing, 2007, 21(1): 4-23.

[21] HAARIO H, LAINE M, MIRA A, et al. DRAM: Efficient adaptive MCMC[J]. Statistics and computing, 2006, 16(4): 339-354.

(编辑 李坤璐)